Capítulo 16

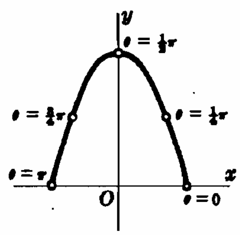
Representación de curvas en forma paramétrica

ECUACIONES PARAMETRICAS. Las coordenadas (x, y) de un punto P de una curva pueden ser funciones, $x = f(u)$, $y = g(u)$, de una tercera variable o parámetro u; las ecuaciones $x = f(u)$ $y = g(u)$ reciben el nombre de *ecuaciones paramétricas* de la curva dada.

Ejemplo:

(*a*) $x = \cos\theta$, $y = 4\,\text{sen}^2\,\theta$ son las ecuaciones paramétricas, siendo el parámetro θ, de la parábola $4x^2 + y = 4$, ya que, $4x^2 + y = 4\cos^2\theta + 4\,\text{sen}^2\,\theta = 4$.

(*b*) $x = \frac{1}{2}t$, $y = 4 - t^2$ es otra representación paramétrica de la curva, en la que el parámetro es t.



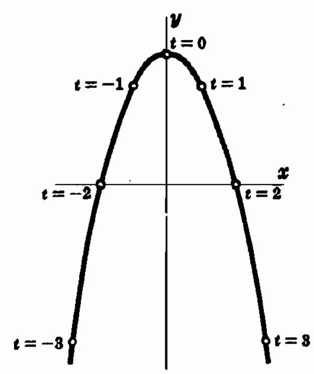


Fig. 16-1

Obsérvese, sin embargo, que el primer sistema de ecuaciones paramétricas solo representa una porción de la curva, mientras que el segundo representa la totalidad de ella.

LA PRIMERA DERIVADA $\dfrac{dy}{dx}$ viene dada por $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy/du}{dx/du}$.

LA SEGUNDA DERIVADA $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ viene dada por $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d}{du}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)\cdot\dfrac{du}{dx}$.

Problemas resueltos

1. Hallar $\dfrac{dy}{dx}$ y $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, siendo $x = \theta - \text{sen}\,\theta$, $y = 1 - \cos\theta$.

$$\frac{dx}{d\theta} = 1 - \cos\theta,\quad \frac{dy}{d\theta} = \text{sen}\,\theta,\quad \text{y}\quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{\text{sen}\,\theta}{1-\cos\theta}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{\text{sen}\,\theta}{1-\cos\theta}\right)\cdot\frac{d\theta}{dx} = \frac{\cos\theta - 1}{(1-\cos\theta)^2}\cdot\frac{1}{1-\cos\theta} = -\frac{1}{(1-\cos\theta)^2}$$

2. Hallar $\dfrac{dy}{dx}$ y $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, siendo $x = e^t \cos t$, $y = e^t \operatorname{sen} t$.

$$\frac{dx}{dt} = e^t(\cos t - \operatorname{sen} t), \quad \frac{dy}{dt} = e^t(\operatorname{sen} t + \cos t), \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\operatorname{sen} t + \cos t}{\cos t - \operatorname{sen} t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\operatorname{sen} t + \cos t}{\cos t - \operatorname{sen} t}\right) \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{2}{(\cos t - \operatorname{sen} t)^2} \cdot \frac{1}{e^t(\cos t - \operatorname{sen} t)} = \frac{2}{e^t(\cos t - \operatorname{sen} t)^3}$$

3. Hallar la ecuación de la tangente a la curva $x = \sqrt{t}$, $y = t - 1/\sqrt{t}$ en el punto para $t = 4$.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}}, \quad \frac{dy}{dt} = 1 + \frac{1}{2t\sqrt{t}}, \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = 2\sqrt{t} + \frac{1}{t}$$

Para $t = 4$: $x = 2$, $y = 7/2$, y $m = dy/dx = 17/4$.

La ecuación de la tangente es $(y - 7/2) = (17/4)(x - 2)$ o sea $17x - 4y = 20$.

4. La posición de una partícula que se mueve a lo largo de una curva viene dada, en función del tiempo t, por las ecuaciones paramétricas $x = 2 - 3\cos t$, $y = 3 + 2\operatorname{sen} t$, en donde x se expresa en metros y t en segundos. Hallar la variación en la unidad de tiempo y el cambio de dirección (*a*) de la abscisa en el instante $t = \pi/3$, (*b*) de la ordenada en el instante $t = 5\pi/3$, (*c*) del ángulo θ de inclinación de la tangente en el instante $t = 2\pi/3$.

$$dx/dt = 3\operatorname{sen} t, \qquad dy/dt = 2\cos t, \qquad \operatorname{tag}\theta = dy/dx = \tfrac{2}{3}\cot t$$

(*a*) Cuando $t = \pi/3$, $dx/dt = 3\sqrt{3}/2$. La abscisa aumenta a razón de $3\sqrt{3}/2$ m/seg.

(*b*) Cuando $t = 5\pi/3$, $dy/dt = 2(\frac{1}{2}) = 1$. La ordenada aumenta a razón de 1 m/seg.

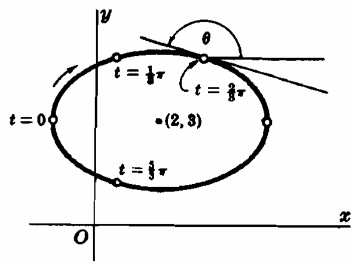


Fig. 16-2

(*c*) $\theta = \operatorname{arc\,tag}(\frac{2}{3}\cot t)$, y $\dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{-6\csc^2 t}{9 + 4\cot^2 t}$. Para $t = 2\pi/3$, $\dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{-6(2/\sqrt{3})^2}{9 + 4(-1/\sqrt{3})^2} = -\dfrac{24}{31}$. El ángulo de inclinación de la tangente disminuye a razón de 24/31 radianes/segundo.

Problemas propuestos

Hallar dy/dx y d^2y/dx^2 en los Problemas 6-9.

5. $x = 2 + t$, $y = 1 + t^2$ *Sol.* $dy/dx = 2t$, $d^2y/dx^2 = 2$

6. $x = t + 1/t$, $y = t + 1$ *Sol.* $dy/dx = t^2/(t^2 - 1)$, $d^2y/dx^2 = -2t^3/(t^2 - 1)^3$

7. $x = 2\operatorname{sen} t$, $y = \cos 2t$ *Sol.* $dy/dx = -2\operatorname{sen} t$, $d^2y/dx^2 = -1$

8. $x = \cos^3\theta$, $y = \operatorname{sen}^3\theta$ *Sol.* $dy/dx = -\operatorname{tag}\theta$, $d^2y/dx^2 = 1/(3\cos^4\theta\operatorname{sen}\theta)$

9. $x = a(\cos\phi + \phi\operatorname{sen}\phi)$, $y = a(\operatorname{sen}\phi - \phi\cos\phi)$ *Sol.* $dy/dx = \operatorname{tag}\phi$, $d^2y/dx^2 = 1/(a\phi\cos^3\phi)$

10. Hallar la pendiente de la tangente a la curva $x = e^{-t}\cos 2t$, $y = e^{-2t}\operatorname{sen} t$ en el punto $t = 0$. *Sol.* -2.

11. Hallar las coordenadas cartesianas del punto de mayor ordenada de la curva $x = 96t$, $y = 96t - 16t^2$. Ind: Calcular t para que y sea máximo. *Sol.* (288, 144).

12. Hallar la ecuación de la tangente y de la normal a la curva (*a*) $x = 3e^t$, $y = 5e^{-t}$ en el punto $t = 0$, (*b*) $x = a\cos^4\theta$ $y = a\operatorname{sen}^4\theta$ en $\theta = \frac{1}{4}\pi$.
Sol. (*a*) $5x + 3y - 30 = 0$, $3x - 5y + 16 = 0$; (*b*) $2x + 2y - a = 0$, $x - y = 0$.

13. Hallar la ecuación de la tangente a la curva $x = a\cos^3 t$, $y = a\operatorname{sen}^3 t$ en un punto $P(x, y)$. Demostrar que la longitud, del segmento de tangente interceptado por los ejes coordenados es igual a a.
Sol. $x\operatorname{sen} t + y\cos t = \frac{1}{2}a\operatorname{sen} 2t$.

14. Dada la curva $x = t^2 - 1$, $y = t^3 - t$, determinar los puntos en los cuales la tangente es (*a*) horizontal y (*b*) vertical. Demostrar que en los puntos en que la curva se corta consigo mismo, las dos tangentes son mutuamente perpendiculares.
Sol. (*a*) $t = \pm\sqrt{3}/3$, (*b*) $t = 0$.